

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE FUNZIONI CONTINUE CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Data la funzione

$$f(x) = \frac{5x^3 - 5x}{2(x^3 - 3x^2 + x + 1)}$$

- stabiliamo il dominio,
- calcoliamo i limiti ai suoi estremi,
- classifichiamo i punti di discontinuità,
- determiniamo gli asintoti della funzione.

Tracciamo, infine, i grafici di $f(x)$ e dei suoi asintoti.

Il dominio

- Usiamo *Inserisci_Testo* per scrivere nel riquadro che appare il titolo del lavoro: I limiti di una funzione (figura 1).
- Rendiamo nota al sistema la funzione digitandone l'espressione nella riga di editazione,

$$(5 * x^3 - 5 * x) / (2 * (x^3 - 3 * x^2 + x + 1)),$$

e inserendola nella #1 con INVIO.

- Il dominio di $f(x)$, trattandosi di una funzione razionale fratta, è dato da tutti i valori reali di x che non annullano il denominatore. Cerchiamo, quindi, gli zeri del denominatore. Importiamo il denominatore dalla #1 facendo tre clic su di essa e battendo il tasto F4, poi lo inseriamo nella #2 con INVIO.

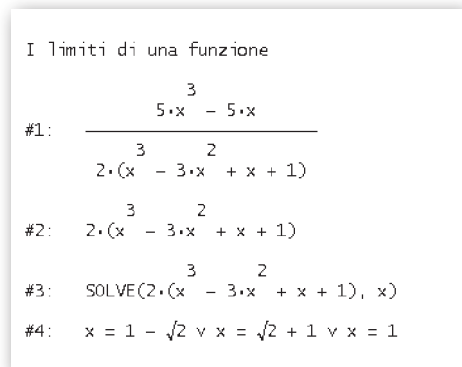
- Una volta spostato nella #2, applichiamo al denominatore il comando *Risolvi_Espressione*, ottenendo nella #4 i valori di x che lo annullano, da escludere dal dominio.

Il dominio della funzione, pertanto, è:

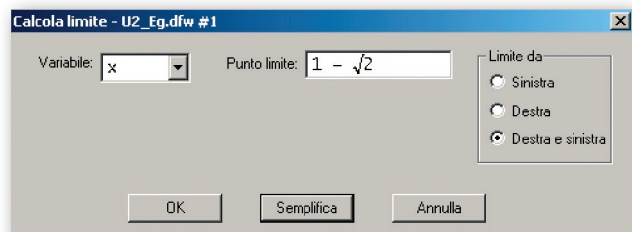
$$x \neq 1 - \sqrt{2} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 1 + \sqrt{2}.$$

Il comando *Calcola_Limite*

- Calcoliamo i limiti per x tendente ai valori finiti, esclusi dal dominio. Attiviamo il comando *Calcola_Limite*, nella finestra di dialogo (figura 2), confermiamo la variabile indipendente x e nel campo apposito digitiamo il valore al quale tende x : $1 - \text{SQRT}(2)$.



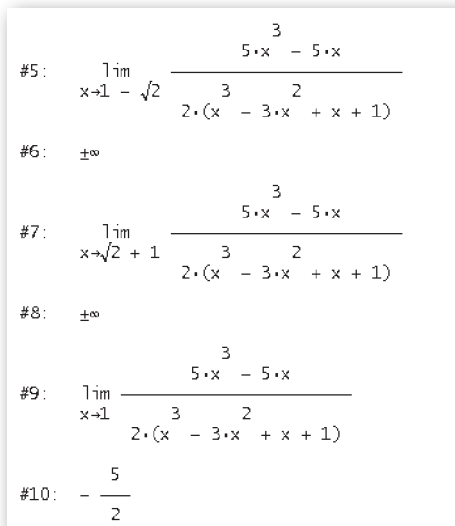
▲ Figura 1 Gli zeri del denominatore.



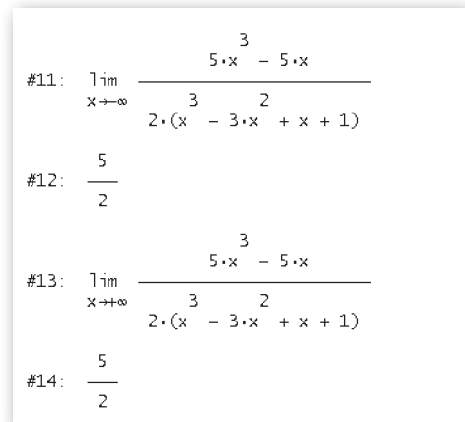
► Figura 2 La finestra di dialogo *Calcola_Limite*.

Usciamo con *Semplifica* e vediamo nella #5 l'impostazione del limite e nella #6 il risultato (figura 3).

- Operiamo in modo analogo per gli altri limiti e leggiamo i risultati nella #8 e nella #10.
- Calcoliamo, poi, i limiti per x che tende all'infinito. Usiamo *Calcola_Limita* e nel campo del limite di x , importiamo il simbolo ∞ con un clic su di esso nella tabella dei simboli matematici. Otteniamo i risultati nella #12 e nella #14 (figura 4).



▲ Figura 3 I limiti della funzione per x che tende ai valori finiti.



▲ Figura 4 I limiti della funzione per x che tende all'infinito.

I punti di discontinuità

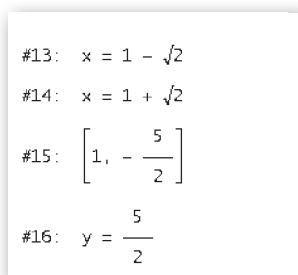
Alla luce dei risultati ottenuti nel calcolo dei limiti, diciamo che i punti $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$ sono di discontinuità di seconda specie e che il punto $x = 1$ è di discontinuità di terza specie o eliminabile.

Gli asintoti della funzione

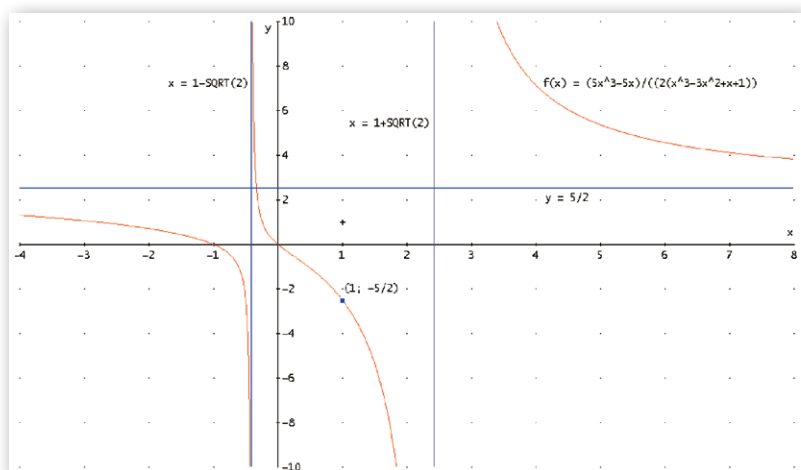
Leggendo sempre i risultati dei limiti, affermiamo che le rette $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$ sono degli asintoti verticali per la $f(x)$ e la retta $y = \frac{5}{2}$ è l'asintoto orizzontale, che esclude l'esistenza dell'asintoto obliquo.

I grafici di $f(x)$ e dei suoi asintoti

Inseriamo le equazioni degli asintoti e le coordinate del punto di discontinuità di terza specie (figura 5), per poterne tracciare i grafici con gli strumenti di Derive (figura 6).



▲ Figura 5 I dati per il grafico.



► Figura 6 Il grafico.

Esercitazioni

Il calcolo dei limiti delle funzioni

Calcola i seguenti limiti, poi, con Derive, controlla il risultato ottenuto.

1	$\lim_{x \rightarrow -\frac{6}{5}} \frac{x^3 - 12}{5x + 6}$	$[\pm \infty]$	10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3 - 3x - 1}}{\sqrt[3]{3x^4 \cdot \sqrt{x} + x}}$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} \right]$
2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 12}{5x + 6}$	$[+\infty]$	11	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 - 9x - 12}{x^4 - 4x^3 - x + 4}$	$\left[\frac{95}{63} \right]$
3	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 1}$	$[0]$	12	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x}$	$[-4]$
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(x^3 - x^2 - x - 1)}{\sqrt{x^3}(x - 2)}$	$[+\infty]$	13	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 - x - 7}}$	$\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{3} \right]$
5	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$	$[1]$	14	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$	$[+\infty]$
6	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^3}$	$[+\infty]$	15	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 - x - 7}}$	$[0]$
7	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^3}{(x^3 - 8)^3}$	$\left[\frac{1}{1728} \right]$	16	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$	$[6\sqrt{2}]$
8	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$	$[1]$	17	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{x + \sqrt{2}}$	$[2\sqrt{2} - 3]$
9	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$	$[-1]$	18	$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{5}} \frac{x - \sqrt[3]{5}}{x^3 - 5}$	$\left[\frac{\sqrt[3]{5}}{15} \right]$

Con l'aiuto di Derive:

- determina il dominio delle seguenti funzioni;
- calcola i limiti ai suoi estremi;
- ricava le equazioni degli eventuali asintoti;
- traccia il grafico delle funzioni con i rispettivi asintoti.

19	$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 3x}$	$[D: x \neq 0 \text{ e } x \neq 3; \text{ asintoti: } x = 0, y = x - 1]$
20	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$	$[D: x \neq 3; \text{ asintoti: } x = 3, y = 0]$
21	$f(x) = \frac{x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - 8\sqrt{2}}{x^3 - 8}$	$[D: x \neq 2; \text{ asintoti: } x = 2, y = 1]$
22	$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$	$[D: x \geq 1 \text{ con } x \neq 2; \text{ asintoti: } x = 2, y = 0, \text{ per } x \rightarrow +\infty]$
23	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 3}$	$[D: x \neq -3; \text{ asintoti: } x = -3, y = -1, \text{ per } x \rightarrow -\infty \text{ e } y = 1, \text{ per } x \rightarrow +\infty]$
24	$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4}}$	$[D: x > 5; \text{ asintoti: } x = 5, \text{ per } x \rightarrow 5^+, y = 1, \text{ per } x \rightarrow +\infty]$

Lo studio dei limiti mediante tabelle

Date le seguenti funzioni, costruisci delle tabelle dove compaiono dei valori della x con i corrispondenti valori della funzione. Per farlo, usa l'istruzione VECTOR con *Semplifica_Approssima*. Eventualmente fai aumentare al sistema il numero delle cifre decimali.

Dalle tabelle cerca di comprendere il valore del limite. Calcola poi il limite e confrontalo con i numeri della tabella.

25 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ con x che «si avvicina» a 3 da sinistra.

26 $f(x) = \frac{x^3 - x}{2(x^3 + 2x - 3)}$ con x che «si avvicina» a 1 da destra.

(Suggerimento. Per ottenere il decremento dei valori della x , scrivi l'istruzione VECTOR nel seguente modo: VECTOR ([x, f(x)], x, c + 10*d, c + d, - d), dove a d va sostituito un valore piccolo e positivo.)

27 $f(x) = \frac{x^3 - x}{2(x^3 + 2x - 3)}$ con x che cresce, tendendo a $+\infty$.

28 $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x + 1}$ con x che «si avvicina» a -1 da sinistra.

29 $f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{2(x^3 - 10x - 24)}$ con x che «si avvicina» a 4 da destra e da sinistra.

Il calcolo dei limiti di funzioni con un parametro

Date le seguenti funzioni nella variabile x e contenenti il parametro k , calcola il loro limite, per x tendente a $+\infty$, dopo aver sostituito i valori indicati al parametro k .

30 $f(x) = \frac{5x^k}{4x^2 + 4x + 1}$ $k = 1, 2, 3$ $\left[0; \frac{5}{4}; +\infty\right]$

31 $f(x) = \frac{6x^k + 6}{\sqrt{x^2 - 4}}$ $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ $[0; 6; +\infty]$

32 $f(x) = \frac{4(x-1)^3}{x^k}$ $k = 2, 3, 4$ $[+\infty; 4; 0]$

33 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{x^k + 1}$ $k = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ $[+\infty; \sqrt[3]{2}; 0]$

34 $f(x) = \frac{\sqrt{x^k + 2}}{x^3 \sqrt{2x - 4}}$ $k = \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3$ $[0; 0; 0]$

35 $f(x) = \frac{5}{x^k}$ $k = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ $[+\infty; 5; 0]$