LABORATORIO DI MATEMATICA
LE DERIVATE CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Calcoliamo le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ nei suoi punti di ascissa -1, 1 e 3.
Tracciamo poi il grafico della funzione e delle tangenti.

La funzione e la sua derivata

- Usiamo *Inserisci_Testo* per scrivere il titolo del lavoro (figura 1).
- Diamo *Crea_Espressione*, e nella riga di editazione digitiamo l'espressione della funzione x^3 − 4x^2 − 3x + 24 e con OK la inseriamo nella #1.
- Per ottenere la derivata della funzione applichiamo il comando *Calcola_Derivata*. Nella finestra di dialogo che appare confermiamo l'ordine di derivazione, 1, e la variabile, x.
- Usciamo con *Semplifica*. Nella #2 appare l'impostazione della derivata e nella #3 la derivata stessa.
- Diamo un nome alla funzione digitando nella riga di editazione F(x) : = e importando con F3 dalla #1 l'espressione della funzione.
- Operiamo in modo analogo per dare il nome D(x) alla derivata.

```
Le tangenti al grafico di una funzione

        3      2
#1:   x  - 4·x  - 3·x + 2

      d   3      2
#2:   —— (x  - 4·x  - 3·x + 2)
      dx

          2
#3:   3·x  - 8·x - 3

              3      2
#4:   F(x) := x  - 4·x  - 3·x + 2

                 2
#5:   D(x) := 3·x  - 8·x - 3
```

▲ **Figura 1** La funzione e la sua derivata.

La formula per la retta tangente e le sue applicazioni

- Scriviamo e inseriamo nella #6 la formula per ottenere l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione (figura 2).
- La applichiamo usando il comando *Semplifica_Sostituisci variabili*. Nella finestra di dialogo ignoriamo la proposta di sostituzione della x e nel campo di sostituzione della a digitiamo 1 e usciamo con OK. Nella #7 appare la semplice sostituzione.
- Diamo *Semplifica_Sviluppa* ottenendo nella #8 l'equazione della prima tangente.
- Operiamo similmente per ottenere le altre due equazioni, come vediamo nella #10 e nella #12.

```
#6:   y = D(a)·(x - a) + F(a)
#7:   y = D(-1)·(x - -1) + F(-1)
#8:   y = 8·x + 8
#9:   y = D(1)·(x - 1) + F(1)
#10:  y = 4 - 8·x
#11:  y = D(3)·(x - 3) + F(3)
#12:  y = -16
```

▲ **Figura 2** Le equazioni delle tangenti.

I punti di tangenza

- Per rendere note al sistema le coordinate dei punti di tangenza, digitiamo [[− 1, F(− 1); 1,F(1); 3, F(3)]] e diamo INVIO (figura 3).
- Sulla #13 applichiamo *Semplifica_Base* per vedere nella #14 le coordinate dei tre punti di tangenza.

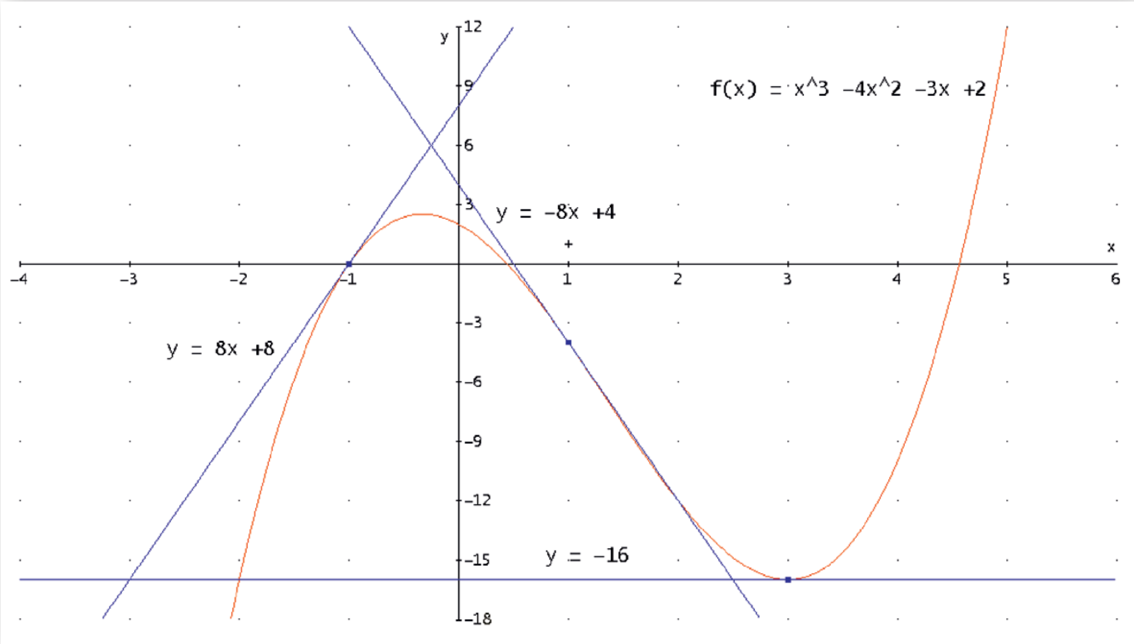
```
       ┌ -1  F(-1) ┐
#13:   │  1  F(1)  │
       └  3  F(3)  ┘

       ┌ -1    0 ┐
#14:   │  1   -4 │
       └  3  -16 ┘
```

► **Figura 3** Le coordinate dei punti di tangenza.

Il grafico

Per costruire il grafico richiesto sfruttiamo gli strumenti grafici di Derive.

- Tracciamo la funzione in rosso e le tangenti e i punti di tangenza in blu.
- Scriviamo le etichette.
- Inquadriamo la zona del piano cartesiano, scegliendo − 4 (il minimo), 6 (il massimo) e 10 (il numero delle tacche), per l'asse orizzontale, e − 18, 12 e 10, per l'asse verticale, nei campi di *Massimo/minimo* del comando *Imposta_Intervallo del Grafico*.
- Al termine delle operazioni vediamo il grafico di figura 4.



▲ **Figura 4** Il grafico della funzione e delle tangenti nei punti di ascissa − 1, 1 e 3.

Esercitazioni

Il calcolo delle derivate

Calcola le derivate dei primi due ordini delle seguenti funzioni, applicando le regole di derivazione. Svolgi poi la verifica con Derive e confronta i risultati ottenuti.

1 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ $\quad [g'(x) = 3x^2 - 6x + 2;\ g''(x) = 6x - 6]$

2 $h(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ $\quad \left[h'(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^2};\ h''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}\right]$

3 $r(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-3}$ $\quad \left[r'(x) = -\dfrac{7x+5}{2(x-3)^2\sqrt{x^2+x+1}};\ r''(x) = \dfrac{28x^3+51x^2+30x+47}{4(x-3)^3\sqrt{(x^2+x+1)^3}}\right]$

4 $s(x) = \dfrac{xe^{x-1}}{x+1}$ $\quad \left[s'(x) = \dfrac{e^{x-1}(x^2+x+1)}{(x+1)^2};\ s''(x) = \dfrac{xe^{x-1}(x^2+2x+3)}{(x+1)^3}\right]$

5 $l(x) = (x^2+1)\ln(x+1)$ $\left[l'(x) = 2x\ln(x+1) + \dfrac{x^2+1}{x+1};\ l''(x) = 2\ln(x+1) + \dfrac{3x^2+4x-1}{(x+1)^2}\right]$

6 $c(x) = \operatorname{sen}^2 x + 2x\cos x$ $[c'(x) = \cos x(2\operatorname{sen} x + 2) - 2x\operatorname{sen} x;\ c''(x) = 4\cos^2 x - 2x\cos x - 4\operatorname{sen} x - 2]$

L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione

Risolvi i seguenti problemi svolgendo i calcoli analitici sul quaderno.
Con l'aiuto di Derive controlla le operazioni svolte.
Per ogni problema costruisci il relativo grafico centrato, le tangenti trovate, i punti di tangenza evidenziati e alcune didascalie.
Determina le equazioni delle tangenti al grafico delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati

7 $f(x) = -x^2 - 4x$ $x_1 = -3,$ $x_2 = -2,$ $x_3 = -1.$ $[y = 2x + 9;\ y = 4;\ y = -2x + 1]$

8 $f(x) = -x^3 + 4x$ $x_1 = -2,$ $x_2 = 0,$ $x_3 = 2.$ $[y = -8x - 16;\ y = 4x;\ y = -8x + 16]$

9 $f(x) = \operatorname{sen} x$ $x_1 = 0,$ $x_2 = \dfrac{\pi}{2},$ $x_3 = \pi.$ $[y = x;\ y = 1;\ y = -x + \pi]$

10 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $x_1 = -2,$ $x_2 = 0,$ $x_3 = 2.$ $\left[y = 2x + 7;\ y = 2x - 1;\ y = \dfrac{2}{9}x - \dfrac{1}{9}\right]$

11 Trova le equazioni delle tangenti al grafico della funzione $f(x) = (x-1)(x-3)^2$ nei punti in cui incontra la retta $y = x - 1$. $[y = 4x - 4;\ y = -x + 3;\ y = 7x - 25]$

12 Determina le equazioni delle tangenti al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ nei punti in cui incontra gli assi cartesiani. $[y = -x - 1;\ y = -1;\ y = x - 1]$

13 Determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{4-x^3}{x^2}$ parallela alla retta $y = 7x$. $[y = 7x + 12]$

14 Determina le equazioni delle tangenti al grafico della funzione $f(x) = x^4 - 9x^2$ nei punti in cui incontra gli assi cartesiani. $[y = -54(x+3);\ y = 0;\ y = 54(x-3)]$

15 Determina l'equazione della tangente al grafico della funzione $f(x) = \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{x}{2}$ perpendicolare al suo asintoto obliquo. $\left[y = 2x + \dfrac{15}{2}\right]$